

Lógica e Fundamentos
1º Ciclo de Matemática
2007/08

I. Sistemas numéricos.

Estruturas de Dedekind-Peano. Princípio do mínimo. Teoremas da recursão e do isomorfismo da Dedekind. Números racionais positivos. A insuficiência dos números racionais. Princípio do supremo. Cortes de Dedekind. Construção dos números reais (corpo ordenado que verifica o princípio do supremo). A unicidade dos números reais.

II. Cardinalidade.

Equipotência. Conjuntos finitos. Princípio dos cascos. Cardinalidade dos conjuntos finitos. Conjuntos infinitos e infinitos à Dedekind. Conjuntos enumeráveis (ou contáveis). Propriedades básicas. Conjuntos numeráveis. A cardinalidade dos números racionais é numerável. Teorema da cardinalidade de Cantor. Aritmética cardinal básica. O Teorema de Schröder-Bernstein. Os números reais estão em correspondência biunívoca com os subconjuntos dos números naturais

III. Axiomas de Zermelo-Fraenkel.

O paradoxo de Russell. Classes próprias. Os axiomas de Zermelo: extensionalidade, separação, par, união, partes e infinito. Formalização das construções básicas da matemática em teoria dos conjuntos (par ordenado, produto cartesiano, função, etc). Conjuntos indutivos. A construção duma estrutura de Dedekind-Peano na teoria de Zermelo. Os axiomas da substituição e da fundação. O axioma da escolha. O axioma contável da escolha e o axioma das escolhas dependentes. Observações sobre o axioma da escolha.

IV. Boas ordens e ordinais.

Boas ordens. A boa ordem de Gödel. Nenhuma boa ordem é isomorfa a um segmento inicial próprio. Indução e recursão transfinita ao longo duma boa ordem. Conjuntos transitivos e fecho transitivo dum conjunto. Ordinais de von Neumann. A classe própria, bem ordenada, dos ordinais (paradoxo de Burali-Forti). Indução e recursão transfinita ao longo dos ordinais. Aritmética ordinal. O colapso duma boa ordem. Teorema da comparabilidade das boas ordens. Número de Hartogs.

V. Equivalências ao axioma da escolha.

Expansões em ordens parciais completas. O teorema do ponto fixo de Zermelo. Equivalências ao axioma da escolha: o princípio da cadeia maximal, o lema de Zorn, o princípio da boa-ordenação e o princípio da comparabilidade dos cardinais.

VI. Números álefos e o universo cumulativo.

Números álefos. O produto de dois números álefos. A cardinalidade dum conjunto como um número álefe. A hipótese do contínuo. A hierarquia cumulativa. O axioma da fundação e o universo cumulativo.

Bibliografia

1. Ferreira, Fernando: *Conjuntos e Fundamentos*. Manuscrito em preparação, 2008.
2. Franco de Oliveira, Augusto: *Teoria dos Conjuntos*. Escolar Editora, 1982.
3. Halmos, Paul: *Naïve Set Theory*. Springer-Verlag, 2001.
4. Hrbacek, Karel & Jech, Thomas: *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, 1999.
5. Moschovakis, Yiannis: *Notes on Set Theory*. Springer-Verlag, 1994.

Fernando Ferreira